MINIGUIDA LOGICA
AL
CALCOLO COMBINATORIO

www.logicamente.cloud

LOGICAMENTE

Cosa dobbiamo fare?

Per risolvere gli esercizi relativi al calcolo combinatorio dobbiamo:

- Sapere eseguire un calcolo fattoriale;
- Sapere distinguere fra combinazioni e disposizioni;
- Saper distinguere fra operazioni semplici e operazioni con ripetizione

Che cosa è il calcolo combinatorio?

Il calcolo combinatorio è un tipo di calcolo che serve per misurare il numero di gruppi che è possibile formare scegliendo una certa quantità di oggetti.

Che cosa è il calcolo fattoriale?

Per poter risolvere gli esercizi sul calcolo combinatorio è fondamentale conoscere come eseguire il prodotto fattoriale di un numero. L'operazione fattoriale consiste in un prodotto fra fattori continuamente decrescenti, fino al raggiungimento del fattore 1. In termini matematici, il fattoriale si indica con un punto esclamativo (!). In termini concreti, preso un numero qualsiasi n, il suo prodotto fattoriale sarà uguale a:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-n+1)$$

Se, per esempio, il nostro numero è 4, avremo che

$$4! = 4 \times (4-1) \times (4-2) \times \dots \times (4-4+1)$$

Ossia, svolgendo i calcoli

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \ \times 1 = 24$$

Presta attenzione che, in un prodotto fattoriale, ogni serie di moltiplicazioni termina con la moltiplicazione per il numero 1.

Che cosa rende diverse le operazioni semplici da quelle con ripetizione?

Gli esercizi relativi al calcolo combinatorio possono metterti di fronte a operazioni semplici o a operazioni con ripetizione. La distinzione fra queste due categorie è fondamentale, poiché tanto le combinazioni quanto le disposizioni (che definiremo nel prossimo paragrafo) possono essere sia semplici sia con ripetizione.

Per distinguere fra queste tipologie di operazioni devi valutare se, nella composizione dei gruppi, il quesito chieda di fare comparire ogni oggetto una singola volta o permetta delle ripetizioni. Un'operazione semplice è infatti un'operazione in cui vengono generati dei gruppi ipotizzando che ogni oggetto appartenente all'insieme degli oggetti considerabili venga utilizzato una volta sola. Un'operazione con ripetizione, ammette invece che gli elementi utilizzati una volta possano essere riutilizzati anche altre volte.

Presta molta attenzione a questa caratteristica, perché l'ammettere o non ammettere ripetizioni modifica i calcoli che dovrai eseguire per risolvere l'esercizio. In ogni caso, i quesiti (per essere ben formulati) devono essere molto chiari sull'ammettere o non ammettere ripetizioni.

Che cosa sono disposizioni e combinazioni?

Una volta chiarito che cosa intendiamo per operazione fattoriale e che cosa rende diverse le operazioni semplici da quelle con ripetizioni, passiamo a distinguere fra combinazioni e disposizioni. Come abbiamo detto all'inizio, il calcolo combinatorio serve per calcolare il numero di gruppi che possiamo

formare utilizzando degli oggetti che ci vengono indicati. La differenza fra combinazioni e disposizioni risiede nell'ordine in cui questi oggetti vengono utilizzati.
Le combinazioni sono dei gruppi di oggetti che vengono generati non tenendo conto dell'ordine con cui vengono chiamati in causa gli oggetti considerati. In sostanza, nelle combinazioni non è importante che un determinato oggetto sia presente in una certa posizione, ma solo che sia presente.
Sei di fronte a delle combinazioni quando, per esempio, ti viene chiesto di determinare quante strette di mano si stringono un determinato numero di persone. In casi come questo si tratta di combinazioni perché non ti interessa l'ordine con cui le persone si stringono la mano, ma solo il numero di strette di mano possibili.
Le disposizioni sono dei gruppi di oggetti che vengono generati tenendo in considerazione l'ordine con cui vengono chiamati in causa gli oggetti considerati. In altri termini, in una disposizione non è importante solo come possono essere combinati determinati oggetti ma anche come questi vengono disposti.
Sei di fronte a delle disposizioni quando, per esempio, ti viene chiesto di determinare quanti numeri di tre cifre si possono formare con le cifre da 0 a 6. In casi come questo l'ordine delle cifre considerate è rilevante, perché (per esempio) il numero 123 è diverso dal numero 321, nonostante le cifre utilizzate siano le stesse.
Un particolare tipo di disposizione è la permutazione. Una permutazione non ti chiede solo di formare dei gruppi di oggetti tenendo in considerazione l'ordine degli elementi del gruppo, ma anche di inserire in questo gruppo tutti gli oggetti presentati.
Sei di fronte a delle permutazioni quando, per esempio, ti chiedono di calcolare quante parole puoi generare anagrammando una parola come "ciao". In casi come questo l'ordine con cui vengono chiamate in causa le lettere è rilevante (la parola "coia" è diversa dalla parola "ocai"). Inoltre, e è proprio questo aspetto che spinge a parlare di permutazioni, le nuove parole devono essere formate utilizzando tutte le lettere della parola di partenza.

Che calcoli devo eseguire?

Alla luce di quanto abbiamo detto fino a ora, gli esercizi sul calcolo combinatorio possono chiederti di realizzare:

- Combinazioni semplici;
- Combinazioni con ripetizione;
- Disposizioni semplici;
- Disposizioni con ripetizione;
- Permutazioni semplici;
- Permutazioni con ripetizione.

Ognuna di queste tipologie chiede di eseguire dei calcoli diversi. Nei paragrafi che seguono le lettere maiuscole C; D; P indicheranno rispettivamente il riferimento alle Combinazioni, alle Disposizioni e alle Permutazioni. Le lettere minuscole n e k indicheranno invece (rispettivamente) il numero di oggetti che vengono dati e il numero di oggetti che possono essere inseriti in ogni gruppo. Chiaramente, nel caso delle permutazioni, il numero n sarà uguale al numero k, mentre in tutti gli altri casi il numero n sarà sempre maggiore o uguale al numero k.

Combinazioni semplici.

Le combinazioni semplici permettono di determinare il numero di modi in cui puoi combinare n oggetti in gruppi composti da k elementi. Ogni elemento di n può essere utilizzato solo una volta. In questi casi non viene richiesto il rispetto di un ordine preciso. La formula per calcolare il numero di combinazioni semplici è:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Combinazioni con ripetizione.

Le combinazioni semplici permettono di determinare il numero di modi in cui puoi combinare n oggetti in gruppi composti da k elementi, ammettendo ripetizioni. In questi casi non viene richiesto il rispetto di un ordine preciso. La formula per calcolare il numero di combinazioni con ripetizione è:

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!}$$

Disposizioni semplici.

Le disposizioni semplici permettono di determinare il numero di modi in cui puoi disporre n oggetti in gruppi composti da k elementi. In questo caso ogni oggetto di n può comparire una volta sola all'interno dei gruppi generati. Ti ricordo che hai di fronte delle disposizioni quando l'ordine di inserimento degli oggetti è un valore da tenere in considerazione. La formula per calcolare il numero di disposizioni semplici è:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione.

Le disposizioni con ripetizione permettono di determinare il numero di modi in cui puoi disporre n oggetti in gruppi composti da k elementi, ammettendo ripetizioni. Ti ricordo che hai di fronte delle disposizioni quando l'ordine di inserimento degli oggetti è un valore da tenere in considerazione. La formula per calcolare il numero di disposizioni con ripetizione è:

$$D_{n,k} = n^k$$

Permutazioni semplici.

Le permutazioni semplici permettono di determinare il numero di modi in cui puoi disporre n oggetti, in gruppi che li contengano tutti e utilizzando ogni oggetto una sola volta. La formula per calcolare il numero di permutazioni semplici è:

$$P_n = n!$$

Permutazioni con ripetizioni.

Le permutazioni con ripetizioni permettono di determinare il numero di modi in cui puoi disporre n oggetti, in gruppi che li contengano tutti e ammettendo che esistano degli oggetti presenti più volte (ossia oggetti che possono ripetersi). La formula per calcolare il numero di permutazioni semplici è:

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta!}$$

In questa ultima formula, le lettere greche rappresentano il numero di volte che gli oggetti ripetuti sono presenti fra gli oggetti dati. In altri termini, queste lettere descrivono la "frequenza" con cui gli oggetti ripetuti vengono ripetuti.

PRATICAMENTE

Praticamente 1

Un matematico ha a disposizione le dieci cifre da 0 a 9 e vuole ideare il maggior numero di codici a due cifre, ma non vuole che le combinazioni si ripetano. Quante combinazioni può trovare?

A) 44
B) 45
C) 46
D) 48
E) 90

La risposta corretta è quella indicata dall'opzione B)

Perché?

Il quesito chiede di determinare il numero di combinazioni possibili senza che avvengano delle ripetizioni. Questo significa che si tratta di un caso di combinazioni semplici. Possiamo quindi applicare la formula che ci permette di calcolare il numero di combinazioni semplici possibili. La formula, in generale, sostiene che

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Dove n indica il numero di oggetti che possiamo selezionare e k indica il numero di oggetti che possono essere inseriti in un gruppo. Nel nostro caso sappiamo che n = 10 e che k = 2.
Di conseguenza:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)! \times 2!}$$

Ossia:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{8! \times 2!}$$

Un metodo rapido per evitare di svolgere troppi calcoli consiste nel notare che 10! = 10 x 9 x 8!.

$$C_{10,2} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2!}$$

Questo ci permette di semplificare i due 8!. Ricordando che 2! = 2 x 1, possiamo scrivere che:

$$C_{10,2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 5 \times 9 = 45$$

Che è quanto viene affermato dall'opzione B).

Praticamente 2

In quanti modi diversi si possono posizionare 3 studenti su una fila di 2 banchi?

A) 36
B) 2
C) 4
D) 18
E) 6

La risposta corretta è quella indicata dall'opzione E).

Perché?

La prima cosa che dobbiamo fare è capire se il quesito ci mette di fronte a combinazioni o a disposizioni. In questo caso l'ordine con cui vengono posizionati gli studenti è rilevante, perché gli studenti non sono oggetti interscambiabili. Inoltre, il posizionamento di studenti non ammette ripetizioni, in quanto ogni studente potrà essere "utilizzato" soltanto una volta. Questo significa che dobbiamo utilizzare la formula relativa alle disposizioni semplici.
Questa formula sostiene che:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dove n e k indicano, rispettivamente il numero di oggetti che possiamo selezionare e il numero di elementi che possiamo inserire in ogni gruppo. Nel caso del nostro quesito abbiamo che n = 3 e che k =2. Di conseguenza:

$$D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$D_{3,2} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

Che è quanto viene affermato dall'opzione E).

Praticamente 3

In quanti modi diversi possiamo anagrammare la parola “tatto”?

A) 60
B) 20
C) 10
D) 5
E) 30

La risposta corretta è quella indicata dall’opzione B).

Perché?

Per prima cosa dobbiamo identificare se abbiamo a che fare con delle combinazioni, con delle disposizioni o con delle permutazioni. Poiché questo esercizio richiede di anagrammare una parola, e siccome gli anagrammi richiedono di utilizzare tutte le lettere della parola di partenza, dobbiamo fare riferimento a delle permutazioni.
Una volta stabilito questo dobbiamo controllare se questa permutazione ammette o non ammette ripetizioni. Poiché la parola “tatto” presenta al suo interno 3 lettere “t”, dobbiamo considerare una permutazione in cui delle 5 lettere disponibili, 3 si ripetono.
La formula per calcolare le permutazioni con ripetizione è:

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta!}$$

Dove n è il numero di oggetti da permutare, e le lettere greche α e β indicano il numero di volte in cui si ripetono gli oggetti che si presentano più volte. Nel nostro caso n è uguale a 5 (perché la parola “tatto” è composta da 5 lettere) mentre α è uguale a 3 (in quanto nella parola “tatto” la lettera “t” viene ripetuta 3 volte). Di conseguenza:

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!}$$

Un modo per risolvere questi calcoli in modo rapido consiste nel notare che 5! = 5 x 4 x 3!

$$P_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!}$$

Questo ci permette di semplificare i 3! Al numeratore e al denominatore. Di conseguenza:

$$P_5^3 = 5 \times 4 = 20$$

Che è quanto affermato dall’opzione B).

Praticamente 4

Un pittore dispone di sei colori e vuole colorare un suo disegno in tanti modi quanti sono possibili combinando due colori, senza mai ripetere le combinazioni. Quanti disegni potrà colorare?

A) 12
B) 14
C) 15
D) 21
E) 20

La risposta corretta è quella indicata dall'opzione C).

Perché?

Il quesito chiede di determinare il numero di combinazioni possibili senza che avvengano delle ripetizioni. Questo significa che si tratta di un caso di combinazioni semplici. Possiamo quindi applicare la formula che ci permette di calcolare il numero di combinazioni semplici possibili. La formula per le combinazioni semplici, in generale, sostiene che

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Dove n indica il numero di oggetti che possiamo selezionare (in questo caso 6) e k indica il numero di oggetti che possono essere inseriti in un gruppo (in questo caso 2). Nel nostro caso sappiamo quindi che n = 6 e che k = 2.
Di conseguenza:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$$

Ossia:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4! \times 2!}$$

Un metodo rapido per evitare di svolgere troppi calcoli consiste nel notare che 6! = 6 x 5 x 4!.

$$C_{6,2} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!}$$

Questo ci permette di semplificare i due 4!. Ricordando che 2! = 2 x 1, possiamo scrivere che:

$$C_{6,2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 3 \times 5 = 15$$

Che è quanto affermato dall'opzione C)

Disponendo di 7 lettere dell'alfabeto, tutte diverse, il numero di parole con 4 lettere che si possono formare potendo ripetere 2 o 3 o 4 volte la stessa lettera è:

A) 256
B) 2401
C) 16384
D) 49
E) 823543

La risposta corretta è quella indicata dall'opzione B)

Perché?

Il quesito chiede di calcolare il numero di parole di 4 lettere (anche prive di senso) che possono essere generate disponendo 7 lettere dell'alfabeto, ammettendo che la stessa lettera possa ripetersi più volte all'interno della stessa parola. Poiché collocare le stesse lettere in posizioni diverse porta alla generazione di parole diverse, l'ordine di presentazione delle lettere è determinante. Ciò significa che il quesito chiede di calcolare il numero di disposizioni possibili. Poiché poi, come detto, il quesito ammette che la stessa lettera possa ripetersi più volte all'interno della stessa parola, siamo di fronte alla necessità di calcolare delle disposizioni con ripetizione.
La formula delle disposizioni con ripetizione, in generale, è:

$$D_{n,k} = n^k$$

Dove n indica il numero di elementi che possiamo selezionare (in questo caso 7) e k indica il numero di elementi che possiamo prendere in considerazione per la costruzione di ogni singolo gruppo (in questo caso ogni gruppo è composto da 4 elementi). Nel nostro caso sappiamo quindi che n = 7 e che k = 4. Di conseguenza:

$$D_{7,4} = 7^4$$

Ossia 2401, che è quanto affermato dall'opzione B)